CLASA a 9-a

1. Determinaţi $a \in \mathbb{R}$ pentru care ecuaţia $2|x-a|+3|x+a|=12$ are exact două soluţii.

***

Soluţie. După cum $a \geqslant 0$ sau $a<0$, mulţimea valorilor funcţiei date de membrul stâng este

x	$-\infty$		$-a$		a		∞
$f(x)$	∞	$\searrow$	$4a$	$\nearrow$	$6a$	$\nearrow$	∞

sau

x	$-\infty$		a		$-a$		∞
$f(x)$	∞	$\searrow$	$-6a$	$\searrow$	$-4a$	$\nearrow$	∞

.... **3p**

Pentru a avea două soluţii este necesar şi suficient ca valoarea minimă $4|a|$ să fie mai mică decât 12 ..... **3p**

Obţinem răspunsul $a \in (-3,3)$ **1p**

2. Fie n un număr natural nenul fixat. Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ ecuaţia $[x-2016]^n+[2017-x]^n=2$, unde prin $[a]$ s-a notat partea întreagă a numărului real a.

Marcelina Popa, Tulcea

Soluţie. Să observăm mai întâi că x nu poate fi număr întreg. Într-adevăr, dacă x ar fi întreg, ecuaţia ar deveni $(x-2016)^n+(2017-x)^n=2$, relaţie imposibilă, fiindcă numerele $x-2016$ şi $2017-x$ au parităţi diferite, deci suma lor este impară **2p**

Avem $[x-2016]=[x]-2016$ şi $[2017-x]=2017+[-x]$. Cum $x \notin \mathbb{Z}$, rezultă că $[-x]=-[x]-1$, deci $[2017-x]=2016-[x]$. Atunci ecuaţia devine $([x]-2016)^n+(2016-[x])^n=2$ **2p**

Dacă n este impar, ecuaţia nu are soluţii **1p**

Dacă n este par, ecuaţia capătă forma $2([x]-2016)^n=2$, de unde $[x]-2016=\pm 1$. Dacă $[x]-2016=1$, obţinem că $x \in [2017,\ 2018)$. Dacă $[x]-2016=-1$, obţinem că $x \in [2015,\ 2016)$. Dar x nu poate fi întreg, deci în final obţinem $x \in (2015,2016) \cup (2017,2018)$ **2p**

3. Determinaţi cel mai mic număr natural n care are proprietatea: oricum am lua n vectori $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_n}$ în plan, există unul dintre ei – de exemplu $\overrightarrow{v_n}$ – şi numerele reale nenegative $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ astfel încât $\overrightarrow{v_n}=x_1\overrightarrow{v_1}+x_2\overrightarrow{v_2}+\ldots+x_{n-1}\overrightarrow{v_{n-1}}$.

***

Soluţie. Arătăm că $n_{\min}=5$ **1p**

Pentru $n=4$, dacă luăm vectorii necoliniari $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ şi opuşii lor, atunci o egalitate de forma $-\overrightarrow{i}=x\overrightarrow{i}+y\overrightarrow{j}-z\overrightarrow{j}$ ar implica $x=-1$, deci proprietatea nu este îndeplinită **2p**

Pentru $n=5$, plasând vectorii cu originea în acelaşi punct, cel puţin unul dintre vectori se află în interiorul unghiului determinat de alţi doi vectori: în caz contrar, dacă îi numerotăm $\overrightarrow{v_2}$, $\overrightarrow{v_3}$, $\overrightarrow{v_4}$, $\overrightarrow{v_5}$ „în ordinea unghiurilor făcute cu $\overrightarrow{v_1}$", atunci am avea $\angle\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2}+\angle\overrightarrow{v_2},\overrightarrow{v_3} \geqslant 180^\circ$ şi analoagele, de unde $360^\circ=\angle\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2}+\angle\overrightarrow{v_2},\overrightarrow{v_3}+\ldots+\angle\overrightarrow{v_5},\overrightarrow{v_1} \geqslant 450^\circ$, imposibil **2p**

Astfel avem, de exemplu, $\overrightarrow{v_1}=\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{v_2}=\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{v_3}=\overrightarrow{OC}$, cu $B \in \mathrm{Int}\widehat{AOC}$. În acest caz, dacă $D=OB \cap AC$, atunci $\overrightarrow{OD}=x\overrightarrow{OA}+(1-x)\overrightarrow{OC}$, cu $0<x<1$ şi $\overrightarrow{OB}=y\overrightarrow{OD}$, cu $y>0$, deci $\overrightarrow{v_2}=yx\overrightarrow{v_1}+y(1-x)\overrightarrow{v_3}+0\overrightarrow{v_4}+0\overrightarrow{v_5}$ **2p**

4. a) Se consideră numerele reale $a,b,c \in (-2,\infty)$ cu proprietatea $a+b+c=-3$. Să se arate că $\dfrac{a}{a+2}+\dfrac{b}{b+2}+\dfrac{c}{c+2} \leqslant -3$. Când are loc egalitatea?

b) Se consideră numerele reale $a,b,c \in (-\infty,-2)$ cu proprietatea $a+b+c=-9$. Să se arate că $\dfrac{a}{a+2}+\dfrac{b}{b+2}+\dfrac{c}{c+2} \geqslant 9$. Când are loc egalitatea?

Petre Guţescu, Tulcea

Soluţie a) Pentru orice $x \in (-2,\infty)$ putem scrie $2(x+1)^2 \geqslant 0 \Leftrightarrow 2x^2+4x+2 \geqslant 0 \Leftrightarrow (x+2)(2x+1) \geqslant x \Leftrightarrow \dfrac{x}{x+2} \leqslant 2x+1$. (1) Dând, pe rând, lui x valorile a,b,c în relaţia (1), adunând membru cu membru relaţiile astfel obţinute şi ţinând seama de relaţia din enunţ, se obţine inegalitatea cerută. Egalitatea înseamnă egalitate în (1), adică $a=b=c=-1$ **4p**

b) Pentru orice $x \in (-\infty,-2)$ putem scrie $2(x+3)^2 \geqslant 0 \Leftrightarrow 2x^2+12x+18 \geqslant 0 \Leftrightarrow (2x+9)(x+2) \geqslant x \Leftrightarrow \frac{x}{x+2} \geqslant 2x+9$ (2) Dând, pe rând, lui x valorile a,b,c în relaţia (2), adunând membru cu membru relaţiile astfel obţinute şi ţinând seama de relaţia din enunţ, se obţine inegalitatea dorită. Egalitatea înseamnă egalitate în (2), adică $a=b=c=-3$ **3p**